

1D NEMLINEÁRIS FELADATOK VÉGESELEMES VIZSGÁLATA EXPLICIT IDŐINTEGRÁLÁSSAL

MOLNÁR GERGELY* – BOJTÁR IMRE**

*PhD-hallgató. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék,
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K mf. 63. Tel.: 463-1434. E-mail: gmolnar@mail.bme.hu

**PhD, egyetemi tanár. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék,
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K mf. 63. Tel.: 463-1160. E-mail: ibojtar@mail.bme.hu

„A kutató művészete az elméleti vizsgálatoknál legjobban
az általa felvetett új problémákban nyilatkozik meg.”

L. V. Kantorovics – V. I. Krülov

Dolgozatunk egydimenziós nemlineáris feladatok végeselemes vizsgálatával foglalkozik. A megoldást explicit időintegrálással, a centrális differenciák módszerével állítottuk elő. A vizsgálat-hoz szükséges saját készítésű szoftver elsősorban a nemlineáris viselkedésű húzott-nyomott rúd mechanikai vizsgálatára szolgál, képes kezelni a fizikai és a geometriai nemlinearitást is.

Az explicit módszerek numerikusan instabilak, így a helyes időlépés megválasztása kulcskérdés. Ebben nyújtanak segítséget a paraméteres futtatások, ahol a kritikus állapothoz tartozó időlépést alapul véve, és azt változtatva értékeltük az eredményeket, megállapítva az optimális időlépés nagyságát. Az ellenőrző számításokat prizmatikus, lineárisan rugalmas rúdon végeztük, először időben állandó koncentrált erő, illetve önsúly majd szinuszosan változó teher hatását vizsgálva. Harmadik esetként a nemlineárisan rugalmas anyagú rúd viselkedését elemeztük rúdvégi koncentrált erőre.

Kulcsszavak: nemlineáris, végeselem, explicit időintegrálás

1. BEVEZETÉS

A dolgozat célja annak vizsgálata, hogyan lehet az explicit időintegrálást a vége-selemes technikával kombinálva alkalmazni egydimenziós mechanikai problémák megoldására. Ezen belül a tanulmány kifejezetten a centrális differenciák módszerét elemzi és hasonlítja össze más algoritmusokkal.

Az explicit módszerek numerikusan instabilak, amennyiben túl nagy időlépést választunk, akkor nem adnak megfelelő eredményt, az optimális időlépés megválasztása ezért lényeges kérdés lesz a későbbiekben, az ellenőrzéseknél is fontos szerepet játszik.

Az általunk kifejlesztett kutatási szoftver a műszaki tudományok iránt érdeklődőknek nyújt segítséget a nemlineáris vége-selemes technikák jobb megértésében.

Alapkoncepciónk az volt, hogy egy egyszerű program segítségével be lehessen mutatni azokat a különbségeket, melyek megkülönböztetik a lineáris szoftvereket nemlineáris társaiktól. Szoftverünk egy húzott-nyomott rúdelem mechanikai viselkedését írja le, képes kezelni a nagy alakváltozásokból és az anyag jellemzőiből eredő nemlineáris viselkedést. Három fajta anyagmodellt használ, egy lineárisan rugalmast, egy felkeményedőt és egy lágyulót. Kétféle terhet alkalmazhatunk a szerkezetre: önsúlyt, illetve a végponton elhelyezett koncentrált terhet, ez utóbbi lehet konstans és szinuszosan változó nagyságú.

2. SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS

A környezetünkben jelenlévő anyagok és szerkezetek többsége nemlineáris tulajdonságú. Viselkedésük leírására csak egy szűk tartományban alkalmasak a klasszikus lineáris elméletek, mert az elmozdulások, illetve a feszültségek növelésével az ezekben a módszerekben használt egyszerűsítések és elhanyagolások már túl nagy hibát okoznak.

A nemlineáris végelemprogramok térhódításának számtalan oka van. Az elméleti háttér már több évtizede rendelkezésre áll, a gyakorlati megvalósítások több tényező miatt mégis csak napjainkra terjedtek el annyira, hogy ma már nehezen képzelhető el komoly tervezőmunka nélkülük. A jelenlegi rendszerek akár arra is lehetőséget adnak, hogy egyes prototípusokat azok tényleges legyártása nélkül a legkülönbözőbb szempontok szerint vizsgáljunk meg, ezzel rengeteg pénzt és időt megtakarítva. Az optimális anyagfelhasználás ráadásul (mind mennyiségileg, mind minőségileg), a gyártási költségek csökkenését eredményezi. Az adott termék modelljével a világ különböző pontjain egyidejűleg dolgozhatnak a mérnöksoportok, ami a csapatmunka virtuális térbe emelésével szintén növeli a hatékonyságot. Ezek a megtakarítások végül a termék fogyasztóinál is jelentkezhetnek.

A nemlineáris számítások használatára például az alábbiak miatt lehet szükség:¹

- az anyagok viselkedéséből adódó anyagi nemlinearitás figyelembevételének szüksége,
- a szerkezet nagy alakváltozásai miatt létrejövő geometriai nemlinearitás hatása,
- a szerkezet elmozdulásai miatt módosuló támaszrendszer hatása (peremfeltéti nemlinearitás) stb.

¹ Abban az esetben, ha a nemlineáris számítással kapott eredmény (pl. elmozdulás) kisebb, mint a lineáris eljárással számított, keményedő, ellenkező esetben lágyuló nemlineáris viselkedésről beszélünk.

Megjegyezzük, hogy a most vizsgált problémától függetlenül minden nemlineáris feladatra igaz, hogy:

- nem alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét,
- a teljes terheléstörténetet figyelembe kell vennünk, továbbá
- a kiindulási feltételek jelentősen befolyásolják a vizsgálat eredményét.

A teljesség igénye nélkül említünk néhány fontos eseményt végeeselemes szoftverek fejlődése kapcsán. Végeeselemes számítást mérnöki területen elsőként A. Hrennikoff (1941) és R. Courant (1942) [1] alkalmaztak, kutatási témájuk dinamikus rezgések vizsgálatára volt [2]. Nem sokkal később jelentetett meg egy cikket M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin és L. J. Top (1956), ebben a merevségek és alakváltozások kapcsolatát tárgyalták komplex szerkezetek esetén. Sokan ezt tekintik a módszer mérnöki értelemben vett első igazi alkalmazásának.

A végeeselemes számítások szélesebb körben az 1950-es évek végén először az építőiparban és a repülőgépgyártásban jelentek meg. A kutatások kezdeti szakaszában a Stuttgarter Egyetem (J. Argyris vezetésével), és a Berkeley Egyetem járt az élen [1], ahol R. W. Clough tevékenykedett. Hamar megjelentek az ipari szoftverek is, a NASA 1965-ban már pályázatot írt ki a NASTRA nevű végeeselemes szoftver megalkotására. Ezzel egy időben született meg az ASKA (Automatic System Kinematics Analysis), melyet J. Argyris fejlesztett ki a Stuttgarter egyetemen. Az ASKA volt az alapja az INTES GmbH által kiadott PERMAS (Powerful Efficient Reliable Mechanical Analysis System) programnak is. Az ASKA-ból és két másik fejlesztésből (TPS10 és a TPNOLI) fejlődött ki a WTP2000 (Wölfel Technische Programme, Höchberg/Würzburg) végeeselemes program, ami komplex ipari szoftverré nőtte ki magát.

Az első nemlineáris program a Berkeley Egyetemen készült 1961-ben, ez a NONSAP (Nonlinear Structural Analysis Program) nevet viselte [2]. A szoftver a szerkezetre ható statikus és dinamikus hatásokat képes volt kezelni. A következő jelentősnek mondható alkalmazás a MARC, melyet Pedro Marcal készített 1969-ben a Brown Egyetemen [3]. Szintén 1969-ben hozták létre John Swanson vezényletével az ANSYS nevű programcsomagot a Westinghouse Astronuclear Laboratory kutatóközpontjában. 1972-ben mutattak be egy másik komoly ipari alkalmazást, az ABAQUS-t [3], mely főleg az USA-ban terjedt el. Az ABAQUS-t David Hibbitt és Klaus-Jürgen Bathe fejlesztette a NONSAP programcsomag tanulmányozását követően. Bathe nem csupán az ABAQUS fejlesztésében vett részt, hanem komoly szerepe van az ADINA nevű programcsomag elkészítésében is.

3. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Bár látszólag az általunk vizsgált feladat egyszerűnek tűnik, az életben nagyon sok példát találunk olyan feladatra, ahol az egydimenziós nemlineáris technika alkalmazására van szükségünk. A teljesség igénye nélkül csak párat sorolnék fel a következőkben:

- nagy megnyúlásra képes rugók alakváltozásának vizsgálata,
- horgászdamil méretezése,
- esztergakések rezgésének vizsgálata,
- folyadékok áramlása vékony csövekben,
- hegymászók kötele, mely felkeményedő tulajdonságot mutat és nagy megnyúlásra képes, és
- jó példa az explicit módszerre a lámpánál késve elinduló autók viselkedésének vizsgálata is.

Feladatunk megoldásához a *központos differenciák módszerét* használtuk. Ez a módszer explicit időintegráláson alapuló algoritmus, részleteinek megértéséhez a következőkben az *időintegrálást* és a *differenciamódszert* fogjuk röviden áttekinteni. A két közelítés ismeretében már könnyen felépíthető a differenciálegyenlet megoldására is alkalmas centrális differenciák módszere.

Ezek után bemutatjuk a végeelemes szoftver felépítésének részleteit, kezdve a koordináta-rendszer definiálásával, majd az alapvető mechanikai egyenleteket sorra véve jutunk el a végeelemes approximációhoz és a szoftver algoritmusához.

A jelölésrendszer ekvivalens a [3] irodalomban használttal, valamint a hagyományos lineáris algebrai jelölésekkel.

IDŐINTEGRÁLÁS

Az időfüggő megoldásfüggvény meghatározása gyakran – különösen nemlineáris esetben – csak numerikusan lehetséges, azaz a keresett függvénynek csak összetartozó diszkrét értékeit tudjuk előállítani.

A mechanikai feladatok nagy részénél a megoldási lépéseket idő- vagy teherparaméterek függvényében vehetjük fel, mivel a feladat térben diszkrét, de időben folytonos. Az időintegrálást ezeknél a problémáknál többféleképpen valósíthatjuk meg, használhatunk explicit, implicit vagy akár kombinált algoritmust is.

Explicit módszernek azt nevezzük, ha keresett változóinkat a már ismertek alapján számítjuk ki (ilyen például a centrális differenciák, a különböző Euler-mo-dellek, az explicit McCormack prediktor-korrektor és a Runge–Kutta-módszerek stb.). Ezzel ellentétben az implicit módszerek felhasználják a jelenbeli és a jövőbe-

li állapot paramétereit is, hogy megoldják az egyenletet (ilyen például a Newton-linearizáció, relaxációs módszerek, Wilson-féle Θ -módszer, Newmark-féle β -eljárások stb.), lásd további részletekről a [4] alatti munkát.

Ha egy fizikai feladatnál a jelen állapotot $Y(t)$ jelöli és a Δt idővel későbbi állapotot pedig $Y(t + \Delta t)$, akkor az explicit módszer lényegét az (3.1) egyenlet, míg az implicit módszerét a (3.2) alatti változat mutatja [5].

$$Y(t + \Delta t) = F(Y(t)), \quad (3.1)$$

$$G(Y(t), Y(t + \Delta t)) = 0, \quad (3.2)$$

ahol F függvény csak $Y(t)$ függvénye, a G függvény viszont függ $Y(t)$ -től és $Y(t + \Delta t)$ -től egyaránt.

A két módszer kombinálásával lehet létrehozni a szemi-implicit algoritmusokat, melyek ötvözik mindkét eljárás előnyeit (Crank–Nicolson-módszer, Newton–Størmer–Verlet-módszer) [6].

Az eljárásoktól elvárjuk, hogy legyenek stabilak (például egy csillapított rezgés vizsgálatánál a számításokkal az időben előrehaladva ne legyenek egyre növekvő amplitúdók) és megfelelő pontossággal szolgáltatassák az eredményeket.

Időintegrálási technikát a végeselemmódszernél jóval előbb, Euler is alkalmazott (1768) [7] nemlineáris differenciálegyenletek kezdetiérték feladatainak megoldására. További módszerek kidolgozásával többen is foglalkoztak, köztük a legfontosabbak A. L. Cauchy (1822), J. C. Adams (1855) C. Runge (1895), M. W. Kutta (1905), Richardson (1905) [8], N. M. Newmark (1959) [9].

Az iterációs módszer lefektetése után tekintsük át a végeselemes approximációhoz szükséges differenciámódszert.

DIFFERENCIAMÓDSZER

A differenciámódszer a differenciálhányadosokat differenciahányadosok segítségével fejezi ki. A differenciahányadosokkal való közelítés módszerének lényege abban áll, hogy a megoldandó differenciálegyenletet valamely alkalmas differenciaegyenlettel pótoljuk. Ezt a differenciaegyenletet a differenciálegyenletből rendszerint úgy kapjuk meg, hogy a differenciálegyenletben a differenciálhányadosokat és különféle differenciáloperátorokat közelítő differenciahányadosok kifejezéseivel, vagyis a felhasznált függvényeknek egy alkalmas rács egyes pontjaiban felvett értékeivel helyettesítjük.

A történeti források szerint integrálási és deriválási számításokat először az 1700-as évek elején végeztek. A 18. század folyamán sok tudományterület befogadta ezeket a módszereket, többek között a csillagászat, az elméleti mechanika,

illetve ennek speciális területei, mint a geodézia és az építőmérnöki szakmák. Gottfried Wilhelm von Leibnitz, a Bernoulli család és Leonhard Euler is komoly eredményeket értek el a módszer alkalmazásával például a rugalmas gerendaelmélet megalkotásával.

A matematikai háttér megalapozásaképpen áttekintettük az időintegrálás, valamint a differenciászámítás alapvető lépéseit. A következőkben a szoftverhez használt mechanikai egyenleteket fogjuk bemutatni, melynek végén eljutunk a használt algoritmushoz.

KOORDINÁTA-RENDSZER

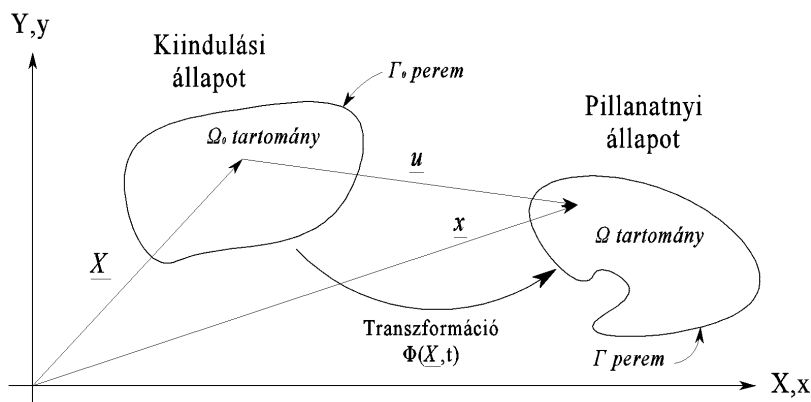
A számítás két alapvető elvének rögzítése után vizsgáljuk meg a modellezéshez használt matematikai és mechanikai eszközeinket. Kezdjük először a vizsgálti technikával, ezt követően a változók definiálása következik.

A mechanikai problémák leírására napjainkban két fontosabb leírásmódot használnak, mindkettő alkalmas nemlineáris feladatok megoldására. A korlátozottan nagy alakváltozásokat szenvedő szerkezetek mechanikai modelljeihez ajánlott a Lagrange-féle koordináták alkalmazása (mely a kiindulási állapothoz viszonyít), ez a Lagrange-féle leírásmód, míg például az áramlási feladatok egyszerűbben oldhatók meg Euler-féle leírási módban (pillanatnyi állapot).

A két rendszer közötti összefüggéssel le tudjuk írni az adott szerkezet pontjainak mozgását:

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t), \quad (3.3)$$

ahol $\underline{\Phi}$ az adott mozgást leíró azon függvény, amely kapcsolatot teremt a kezdeti és a pillanatnyi állapot között (1. ábra).



1. ábra. Lagrange- és Euler-féle leírási mód sematikus vázlata

További számításainkban mi a Lagrange-leírasmódot fogjuk használni.

ALKALMAZOTT VÁLTOZÓK

Ahogy azt az előző pontban láthattuk, az \underline{x} és \underline{X} koordináták különböző állapot-hoz tartozó koordinátákat jelölnek. Mivel az általunk fejlesztett szoftver Lagrange-féle leírasmódban készült el, ezért a következőkben az anyagi koordináták szerinti felírásra fogunk szorítkozni.

Az elmozdulást (\underline{u}) egyszerűen meg lehet adni a kétféle állapot koordinátáinak különbségeként a (3.4) képlet alapján:

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x} - \underline{X} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) - \underline{X}. \quad (3.4)$$

Ebből a kifejezésből számítható a sebesség (\underline{v}) és a gyorsulás (\underline{a}):

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{u}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \underline{X}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{X}, t)}{\partial t}, \quad (3.5)$$

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\Phi}^2(\underline{X}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial \underline{X}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{X}, t)}{\partial t}. \quad (3.6)$$

A deformációgradiens-tenzor teremti meg a differenciális kapcsolatot a Lagrange- és az Euler-rendszerek között, lásd a (3.7) alatti összefüggéseket. A tenzorra az alakváltozások és elmozdulások leírásánál is szükség van. Definíció szerint a deformációgradiens-tenzor egy hivatkozási állapotban lévő rendszerben a $d\underline{X}$ hosszúságú elemi vonaldarab hosszát a pillanatnyi koordináta-rendszerbe ($d\underline{x}$) transzformálja a következők szerint:

$$d\underline{x} = \underline{F} \cdot d\underline{X}, \quad \underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = (\nabla_0 \underline{\Phi}(\underline{X}, t))^T = \text{grad } \underline{\Phi}(\underline{X}, t). \quad (3.7)$$

A ∇_0 operátor „nulla” indexe arra utal, hogy az anyagi (\underline{X}) koordináták szerint történik a gradiens számítás.

Az alkalmazott vizsgálatokhoz, ki kellett választanunk a megfelelő alakváltozást is. Laboratóriumi 1D húzókísérletek segítségével egyszerűen lehet mérni például a próbatest adott irányban történő megnyúlását. A méretváltozás segítségével definiálható alakváltozást az l_0 eredeti hossz segítségével a következőképpen számítjuk:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \varepsilon + 1 = \frac{\Delta l}{l_0} + 1 \mapsto \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3.8)$$

ahol λ a megnyúlás, és ε a mérnöki alakváltozás. A „mérnöki” alakváltozás az elemi test terhelési hatására bekövetkező hosszváltozás és a terhelést követő teljes hossz hányadosaként definiálható (3.8). Létezik logaritmikus alakváltozás is, melyet az elemien kicsiny szálak hosszváltozására alkalmazott „mérnöki” alakváltozás hossznövekményre vett integrálja segítségével számítanak. A deformációgradiens tenzor egy dimenzióban gyakorlatilag a megnyúlással egyezik meg, számításainban ezt használjuk.

Az elmozdulási és alakváltozási paraméterek mellett a feszültségváltozókra is szükségünk van. A feszültség fogalmát A. Cauchy vezette be 1822-ben, majd az ő eredményeire támaszkodva később G. Piola és G. R. Kirchhoff is megalkották saját feszültségtenzoraikat [3]. A Cauchy által készített feszültségtenzor fizikai tartalommal bír és szimmetrikus. Az elem terhelése közben egy pillanatnyi állapothoz tartozó \underline{n} normálisú dA elemi területen működő elemi erővektor ($d\underline{f}$) és a pont környezetének feszültségállapotát leíró tenzor között teremt összefüggést [3]:

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot dA = d\underline{f} = \underline{t} \cdot dA. \quad (3.9)$$

A nominális vagy más néven első Piola–Kirchhoff-feszültségtenzor (\underline{P}) szintén a pillanatnyi állapothoz tartozó $d\underline{f}$ erővektort veszi alapul, de a kiindulási állapothoz tartozó normálisú (\underline{n}_0) felület (dA_0) feszültségállapotával teremt kapcsolatot. Rendszerint nem szimmetrikus, és fizikai tartalma sincs (3.10):

$$\underline{P} \cdot \underline{n}_0 \cdot dA_0 = d\underline{f} = \underline{t}_0 \cdot dA_0. \quad (3.10)$$

A nominális feszültségtenzor (\underline{P}) a Lagrange-rendszerben értelmezett feladatokhoz használatos. A két feszültségtenzor közötti kapcsolat a következőképpen adható meg:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{FP}. \quad (3.11)$$

MECHANIKAI ALAPEGYENLETEK FELÍRÁSA

A következőkben a teljes² Lagrange-leírasmódhoz tartozó alapvető mechanikai egyenleteket fogjuk felsorolni. A módszerhez a deformáció-gradienst és az első Piola–Kirchhoff-feszültségtenzort fogjuk alapvető paraméterként felhasználni.

² A teljes Lagrange-féle leírasmódban a derivált függvényeket az anyagi koordináták segítségével számítjuk, a szükséges integrál-kifejezések (a gyenge alak) a kezdeti konfigurációt használják, feszültségtenzornak pedig az első Piola–Kirchhoff-tenzort választjuk.

Módosított³ Lagrange-leíráshoz ezzel szemben a Cauchy-féle feszültségtenzort és az alakváltozások idő szerinti deriváltját érdemes alkalmazni. A módosított rendszer főleg áramlási feladatok leírására alkalmas.

A továbbiakban kifejezetten az egydimenziós feladatra fogunk koncentrálni [3], ezáltal sok vektoriális mennyiség skalárrá egyszerűsödik.

Anyagmegmaradás

Az alábbi egyenlet írja le az anyagmegmaradás egydimenziós esetre vonatkozó egyenletét (3.12):

$$\rho(X, t) \cdot \Delta V = \rho_0(X) \cdot \Delta V_0, \quad (3.12)$$

vagy egyszerűbben:

$$\rho \cdot F \cdot A = \rho_0 \cdot A_0, \quad (3.13)$$

ahol A_0 és A az 1D feladat kezdeti és pillanatnyi állapotához tartozó metszet-felületeit jelentik, ρ_0 és ρ pedig a sűrűség függvényei a két helyzetben. ΔV_0 és ΔV a kezdeti és pillanatnyi állapot térfogata.

Energiamegmaradás

Az energiamegmaradás egyenletét az első Piola–Kirchhoff-feszültségtenzor és a deformációgradiens-tenzor segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$\rho_0 \dot{W}_b = \dot{F}P - q_{X,X} + \rho_0 s, \quad (3.14)$$

ahol $q_{X,X}$ a hőáram változását, az s paraméter a rendszerben lévő (tömegegységre jutó) fajlagos hőforrást jelöli, W_b pedig a fajlagos alakváltozási energia.

³ A módosított Lagrange-féle rendszerben a deriváltakat a térbeli koordináták figyelembevételével határozzuk meg, a gyenge alak pedig a deformált (pillanatnyi) konfigurációra épül. Ilyenkor a Cauchy-féle (vagy más néven fizikai) feszültségtenzort alkalmazzuk belső szilárdsági jellemzőként.

Anyagegyenlet

Az anyagegyenletek jelen esetben az első Piola–Kirchhoff-feszültségtenzort és a deformációgradiens-tenzort (vagy esetleg annak idő szerinti deriváltjait) kötik össze. Nagyon fontos, hogy csak annyi paramétert szabad felhasználni a számítás-hoz, amennyit biztosan meg tudunk mérni laboratóriumi körülmények között. Az általános alak (itt t a valódi vagy teherparaméterre konvertált idő, \bar{t} pedig annak egy pillanatnyi állapota):

$$P(X, t) = S^{PF}(F(X, \bar{t}), \dot{F}(X, \bar{t}), \dots), \bar{t} \leq t. \quad (3.15)$$

Az S^{PF} függvényben a PF index a P feszültség és az F gradiens összefüggésére hívja fel a figyelmet.

Mozgásmennyiség egyenlete

A mozgásmennyiség egydimenziós egyenlete a következő:

$$(A_0 P)_{,X} + \rho_0 A_0 b = \rho_0 A_0 \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad (3.16)$$

ahol b a vonal mentén megoszló (egydimenziós feladatnál például ilyen az önsúly) erőrendszert jelent, az indexben szereplő „ X ” szimbólum pedig a parciális deriválásra utal itt és a továbbiakban is.

Perem-, kezdeti és folytonossági feltételek

Peremfeltételeket egydimenziós esetben az elem két végpontján írhatunk fel, ezek lehetnek elmozdulási vagy feszültségi feltételek. Egy pontban mindkét feltételt nem írhatjuk elő. Kezdeti feltételként megadhatunk elmozdulás- és sebességfüggvényeket, vagy sebesség- és feszültségfüggvényeket. Folytonossági feltétel használatára a mozgásmennyiség egyenlete miatt van szükségünk.

A fent ismertetett egyenletek a feladatok úgynevezett erős alakját adják, véges-elemes számításoknál azonban elsősorban a gyenge alakra van szükségünk.

A gyenge alak előállítása

A mozgásmennyiség egyenletéből indulunk ki (3.16), az egyenletet megszorozzuk a $\delta u(X,t)$ tesztfüggvénnyel.

A függvényvariációt úgy választjuk meg, hogy az értéke zérus legyen az elmozdulási peremfeltételek tartományában. A (3.17)-ben megfogalmazott feltétel akkor lesz zérus, ha minden tesztfüggvény merőleges az egyenlet bal oldalának második, zárójelben lévő tagjára, vagyis a tartományon vett szorzatintegráljuk zérus.

$$\int_{x_a}^{x_b} \delta u \left[(A_0 P)_{,x} + \rho_0 A_0 b - \rho_0 A_0 \frac{d^2 u}{dt^2} \right] dX = 0. \quad (3.17)$$

Felhasználva a fent említett egyenleteket és feltételeket, a következő gyenge alakhoz (a virtuális munkák tételéhez) jutunk (3.18):

$$\int_{x_a}^{x_b} [\delta u_{,x} A_0 P - \delta u (\rho_0 A_0 b - \rho_0 A_0 a)] dx - (\delta u A_0 \dot{t}_x) \Big|_r = 0, \quad (3.18)$$

ahol \dot{t}_x a kezdeti időpillanatban a rudat terhelő x irányú feszültségvektor. A (3.18) összefüggésben szereplő első tag (az integrálon belül) a belső munkát jelképezi, a harmadik tag a kinetikus munkát, a második és negyedik tag pedig a külső munkát. A negyedik tagban a peremeken történik az összegzés. Így a virtuális munkák tétele tömör alakban tehát:

$$\delta W = \delta W_b - \delta W_k + \delta W_{kin} = 0. \quad (3.19)$$

AZ 1D NEMLINEÁRIS VÉGESELEMES MODELL FELÉPÍTÉSE

A végeeselemes modellt a virtuális munka tétele alapján alkothatjuk meg. Az $[X_a, X_b]$ tartományon lévő rudat n_e elemre osztjuk, egy elemen m db csomópontot vehetünk fel, így összesen n_N darab csomópontunk lesz. Az I -edik csomópontot X_I -vel, az egy elemen belüli $[X_I^e, X_m^e]$ tartományt Ω_e -vel jelöljük.

Az egyszerűség kedvéért az 1-es csomóponton lesz a rögzített támasz – vagyis az előírt elmozdulás itt 0 –, valamint az utolsó n_N -edik csomópontra tesszük a terhet („ez lesz az előírt feszültség”). Következő feladatunk a végeeselemes approximáció felállítása, az elmozdulásfüggvény és variációjának felírása bázisfüggvények segítségével (3.20).

$$u(X, t) = \sum_{l=1}^{n_N} N_l(X) u_l(t), \quad \delta u(X) = \sum_{l=1}^{n_N} N_l(X) \delta u_l, \quad (3.20)$$

ahol $N_l(X)$ egy C^0 folytonos bázisfüggvény, és $u_l(t)$ a csomópontok elmozdulásait jelenti. A bázisfüggvényeknek most is teljesíteniük kell azt a feltételt, hogy csak egy csomóponton 1 az értékük, a többi csomóponton pedig 0 ($N_l(X_j) = \delta_{lj}$).

A közelítés segítségével a következő alakúak a virtuális munka tagjai:

$$\delta W_b = \int_{x_a}^{x_b} \delta u_{,X} A_0 P dX = \delta u \int_{x_a}^{x_b} N_{l,X} A_0 P dX = \sum_{l=1}^{n_N} \delta u_l f_l^b = \delta \underline{u}^T \underline{f}^b, \quad (3.21/a)$$

$$\begin{aligned} \delta W_k &= \int_{x_a}^{x_b} \delta u \rho_0 A_0 b dX + (\delta u A_0 t_x^{-0}) \Big|_{\Gamma_l} = \\ &= \sum_{l=1}^{n_N} \delta u_l \left(\int_{x_a}^{x_b} N_l \rho_0 A_0 b dX + (N_l A_0 t_x^{-0}) \Big|_{\Gamma_l} \right) = \delta \underline{u}^T \underline{f}^k \end{aligned} \quad (3.21/b)$$

$$dW_{kin} = \int_{x_a}^{x_b} \delta u \rho_0 A_0 a dX = \sum_{l=1}^{n_N} \delta u_l \int_{x_a}^{x_b} N_l \rho_0 A_0 \sum_{j=1}^{n_N} a_j(t) N_j dX = \delta \underline{u}^T \underline{f}^{kin}. \quad (3.21/c)$$

Az a változó a gyorsulási értékeket tartalmazza. A (3.19) egyenletbe visszahe-lyettesítve a következő összefüggést kapjuk (3.22):

$$\sum_{l=1}^{n_N} \delta u_l (f_l^b - f_l^k + f_l^{kin}) = 0, \quad \forall \delta u\text{-ra.} \quad (3.22)$$

Az előírt kezdeti feltételek miatt δu_l az 1. pontban mindig 0, ezért a többi pontban a zárójelben lévő kifejezést kell 0-vá tenni. Elhagyva δu_l -t, a következő szemidiszkrét alakhoz jutunk:

$$\underline{f} = \underline{f}^k - \underline{f}^b = \underline{\underline{M}} \underline{a}. \quad (3.23)$$

Ezt a kifejezést hívjuk a feladat mozgásegyenletének.

JELLEMZŐ MÁTRIXOK

Az elkészült szoftver kétsomópontú végelemeket használ, lineáris Lagrange-féle bázisfüggvényekkel. Ebben a pontban mutatjuk be az alapvető mátrixok felépítését.

Elsőként az elmozdulás (u) értékét írjuk fel (3.24). Az elem kezdeti hossza l_0 , az idő változásával ez $l(t)$ -re módosul. Az interpolációt az $[X_1, X_2]$ elemi tartományon végezzük:

$$u(X, t) = \frac{1}{l_0} [X_2 - X \quad X - X_1] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \mapsto N^e = \frac{1}{l_0} [X_2 - X \quad X - X_1]. \quad (3.24)$$

Az összefüggésből jól látszik, hogy a bázisfüggvények a következők (3.24). Az elmozdulásokból egyszerűen számolhatjuk az alakváltozásokat (3.25):

$$\varepsilon(X, t) = u_{,X} = \frac{1}{l_0} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \mapsto \underline{B}_0 = \frac{1}{l_0} [-1 \quad 1]. \quad (3.25)$$

Ezek segítségével a következők szerint alakul a csomóponti belső és külső erők vektora:

$$\underline{f}_e^b = \int_{\Omega_0^e} \underline{B}_0^T P d\Omega_0 = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P A_0 dX \quad (3.26)$$

$$\underline{f}_e^b = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \underline{N}^T b A_0 d\Omega_0 = \int_{X_1}^{X_2} \frac{\rho_0}{l_0} \begin{bmatrix} X_2 - X \\ X - X_1 \end{bmatrix} b A_0 dX. \quad (3.27)$$

Az elemekhez tartozó tömegmátrix megadásához először felírjuk a konzisztens tömegmátrixot (3.28), majd az általunk használt diagonalizált változatát is (3.29):

$$\underline{\underline{M}}_e^K = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \underline{N}^T \underline{N} d\Omega_0 = \int_0^1 \rho_0 \underline{N}^T \underline{N} A_0 l_0 d\xi, \quad (3.28)$$

$$\underline{\underline{M}}_e^D = \sum_J M_{IJ}^K = \int_0^1 \rho_0 N_I \sum_J N_J dX = \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 A_0 \underline{N} dX. \quad (3.29)$$

A SZOFTVERHEZ FELHASZNÁLT ALGORITMUS ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÁSA

Kezdeti paramétereink a következők:

$$X_a, X_b, A_0(X), \rho_0(X), b(X, t), u_0(X), \nu_0(X), \bar{u}(X_a, t), t_x(X_b, t), n_{\max}, \Delta t, S^{PF},$$

azaz a rúd alakja, sűrűsége, súlya, kezdeti elmozdulásai, kezdeti sebességei, valamint a terhek, a maximális lépések száma, az időlépés mérete és az anyagegyenlet. A keresett változók az elmozdulás- és a feszültségfüggvény: $u(X, t)$, $P(X, t)$. Mivel explicit időintegrálási technikát alkalmaztunk, a lépések időlépések. A szoftver algoritmus a következő:

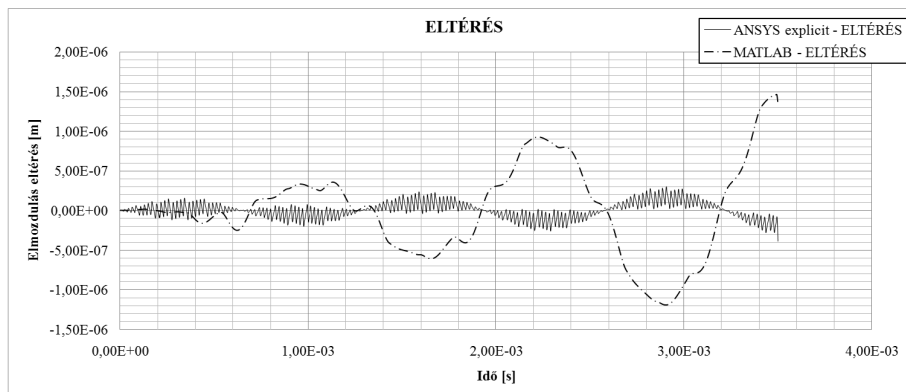
1. változótömbök deklarációja,
2. bemenő adatok helyességének ellenőrzése,
3. n futóparaméter beállítása 0-ra,
4. anyagmodell paramétereinek betöltése a belső változókba,
5. az elmozdulásvektorok feltöltése a kezdeti feltételek alapján,
6. a keresztmetszeti adatok feltöltése,
7. a rudak végeelem számainak feltöltése,
8. a diagonalizált tömegmátrix elkészítése,
9. $\alpha = 0,5$ (ha $n = 0$), a többi lépésben $\alpha = 1$,
10. az eredő erővektor meghatározása:
 - a) elmozdulások kiválasztása minden elemhez,
 - b) a deformációgradiens tenzor ($F = \underline{B} \underline{u}_e^n + 1$) kiszámítása,
 - c) a nominális feszültségtenzor kiszámítása az anyagegyenlet segítségével,
 - d) a belső erők csomóponti komponensei: $\underline{f}_e^b = \int_{X_1^e}^{X_n^e} \underline{B}_0^T P A_0 dX$, (3.30)
 - e) a külső erők vektora: $\underline{f}_e^k = \int_{X_1^e}^{X_n^e} \rho_0 \underline{N}^T b A_0 dX + (\underline{N}^T A_0 t_x) \Big|_{\Gamma}$,
 - f) az eredő erővektor meghatározása: $\underline{f}_e = \underline{f}_e^k - \underline{f}_e^b = \underline{f}_e^n$, (3.31)
11. a csomópontok globális gyorsulásai: $\underline{a}^n = \underline{M}^{-1} \underline{f}_n$, (3.32)
12. csomópontok sebességei: $\underline{v}^{n+\frac{1}{2}} = \underline{v}^{n+\frac{1}{2}-\alpha} + \alpha \Delta t \underline{a}^n$, (3.33)
13. a csomópontok elmozdulásai: $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \Delta t \underline{v}^{n+\frac{1}{2}}$, (3.34)
14. $n = n + 1$, és a ciklus újraindítása (10. lépéstől) addig, míg $n < n_{\max}$.

4. A SZOFTVER BEMUTATÁSA ÉS AZ ALGORITMUS ELLENŐRZÉSE

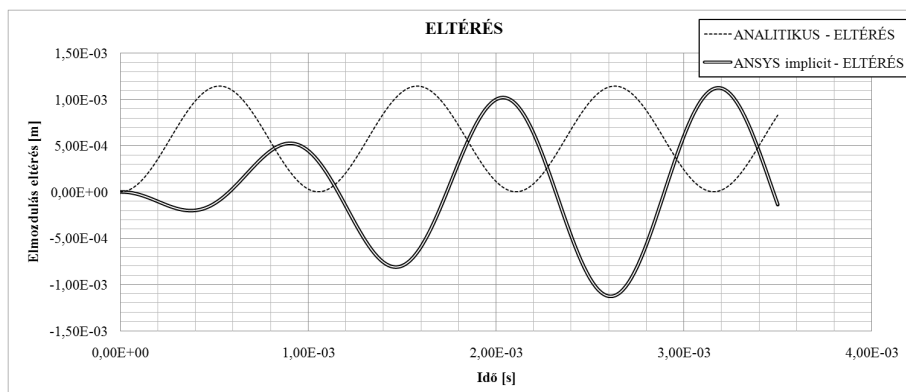
VERIFIKÁLÁS

Az algoritmus ellenőrzése a szoftverek tesztelésével történt. Olyan példákat futtattunk rajta, melyeknek ismertük a megoldását. Ilyen feladat például egy lineárisan rugalmas rúd szabadrezgése egy végeelemre való felosztással. Az ellenőrzésre használt pontos megoldást *ANSYS 12.0.1 Structural/LS-DYNA* és *MATLAB 7.10.0.499 (R2010a)* programcsomagokkal állítottuk elő.⁴

A számítások eltérését a 2. ábra és a 3. ábra mutatja. Láthatjuk, hogy az *ANSYS* és a szoftverünk közötti hiba konvergens, gyakorlatilag nem változik jelentősen.



2. ábra. Eltérés a MATLAB-bal és ANSYS/LS-DYNA-val készített módszertől



3. ábra. Eltérés az analitikus és az implicit módszertől

⁴ Megjegyezzük, hogy természetesen akár külön programnyelvet lehet alkalmazni egy algoritmus tesztelésére, és a tesztelés alaposságától függően ez a folyamat hosszú időt is igénybe vehet.

A *MATLAB*-bal és az analitikus megoldással számított értékekhez képest a szoftver eredményei egyre növekvő eltérést mutatnak. Ennek az az egyszerű oka, hogy míg az általunk készített szoftver és az *ANSYS* explicit időintegráló módszer használ – időlépések pontossága nagyban függ a megelőző lépés pontosságától – a már meglévő hiba halmozódik. A *MATLAB ode45* differenciálegyenlet-megoldó modulja negyed és ötöd rendű, változó lépésközű Runge–Kutta–Fehlberg-algoritmussal dolgozik [10], így a hiba kisebb mértékben növekszik, mint az általunk használt módszernél. Láthatjuk azonban, hogy az eltérés értékei nem érik el így sem a harmadik értékes jegyet.

PROGRAMLEÍRÁS

Az egydimenziós, nemlineáris viselkedésű húzott-nyomott rúd mechanikai vizsgálatára alkalmas, a virtuális munkák tételére épülő végeselemes szoftver *Microsoft Excel 2003* platformra, *Visual Basic for Applications (VBA)* nyelven íródott.

A számításhoz szükséges két csomópontú, lineáris bázisfüggvényű végeselemeket a szoftver automatikusan generálja. Az időfüggő feladat megoldása *explicit* modellel, a központos differenciák módszerével történik. A megfelelő időlépés, illetve a kívánt iterációszám megadása a felhasználó feladata.

A program célja a szerkezet időfüggő csomóponti elmozdulásainak, illetve feszültségeinek számítása.⁵

Illusztrálásként az ábrán (4. ábra) bemutatjuk a program adatelőkészítésre alkalmas képernyőablakát.

Bemenő adatok

A szoftver használatánál az első dolgunk a rúd geometriai adatainak megadása, amit a *kettős vonallal* bekerített táblázatrészen tehetünk meg. A szoftver 5 különböző méretű rúdrészt képes kezelni. A „*Rúdgeometria*” nevű grafikonon lehet látni a rúdelem kezdeti alakját. Következő feladatunk a rudat felosztani végeselemekre, amit rögtön a geometria után tehetünk meg.

Továbbiakban megadhatók a terhelésre vonatkozó feltételek. Itt kialakíthatunk rúd végén konstans, valamint időben változó terhet és vonalmentén megoszló önsúlyt (*szaggatott blokk*).

⁵ A szoftver, valamint a hozzá tartozó részletes leírás szabadon letölthető a Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék honlapjáról, az alábbi címről: <http://www.me.bme.hu/hu/kurzus/nemlinearis-vegeselemek-modszer>

Nemlineáris, egy dimenziós végelemes feladat megoldása Lagrange-féle leírás módban

Terhek

Szerkezet sűrűsége: $\rho_0 = 7.85 \text{ g/cm}^3$

Szerkezet önsúlya: $\gamma = 0.00 \text{ N/mm}$

Nehézségi gyorsulás: $g = 0.00 \text{ m/s}^2$

Végkeresztmetszeten működő teher: $N = 250\,000.00 \text{ N}$

Telhetípus: *statikus*

Anyagmodell

$P_i = C \cdot F_i^v$

Keményégi modulus: $C = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

Merevségi paraméter: $v = 0.5$

Az anyagmodell: **Nemlineáris**

P-F diagram

Geometria

Rúdszakasz száma	Rúdszakasz hossza, [mm]	Kezdeti keresztmetszeti terület, [mm ²]	Végkeresztmetszeti terület, [mm ²]	Végelemek száma
1	1500	25	25	1
2				
3				
4				
5				
Összesen	1500			1

Rúdgeometria

Peremfeltétel

Csomópont száma	Kezdeti elmozdulás	Kezdeti sebesség
	[mm]	[m/s]
1	0.00	0.00
2	0.00	0.00

Explicit megoldóra vonatkozó beállítások

Geometria és a végelemes felosztásra vonatkozó beállítások

Anyagmodellel kapcsolatos beállítások

Terhekkel kapcsolatos beállítások

Iteráció

Időlépés: $\Delta t = 6.3E-07 \text{ s}$ Stabil időlépés: $\Delta t_{stabil} = 6.3E-05 \text{ s}$ $\alpha = 0.50$

Iterációs szám: $n = 6321$ lépésszám

Nemlineáris számítás indítása

A számítás két pontos végelemmel történik, lineáris hányófüggvényeket használva.
A változó pontos jelentése megtalálható a szoftver mellé fűzött TDK dólgozatban.

Készítette: Molnár Gergely, Építőmérnök hallgató (M.Sc.)
Konzulens: Dr. Bojár Imre egyetemi tanár

2010.03.13

4. ábra. Bemenő adatok képernyője

Ezek után már csak az anyagmodell hiányzik, mely két paraméterből áll, egyik az anyag Young-modulusa, másik a felkeményedési vagy lágyulási tényezője (*pont-vonal blokk*).

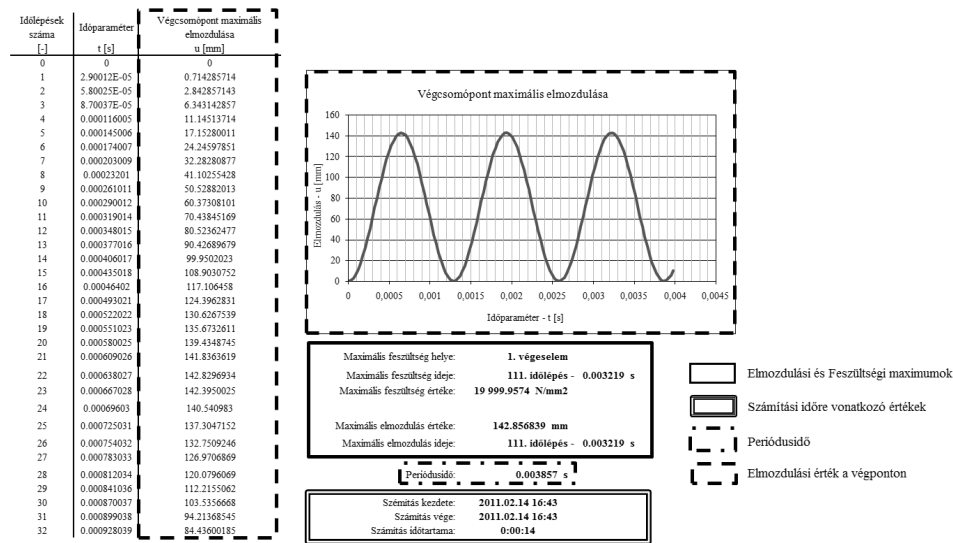
Végül a megoldó modulra vonatkozó időlépés méretét és az iterációs számot adhatjuk meg. Az időlépés beállítása mellett található egy, a stabil megoldáshoz szükséges kritikus időlépés is (*folymatos vonal*).

A beállítások megadásának végeztével elindíthatjuk a számolást a „Nemlineáris számítás indítása” gombbal. A program automatikusan átugrik az „Eredmények” fülre és menti a számítások eredményeit.

Eredmények kiértékelése

A számítás befejeztével a program automatikusan aktiválja az „Eredmények” munkalapot. A *szaggatott* blokkban láthatók az utolsó csomópont elmozdulásai, a hozzá tartozó időlépéssel. A „Végcsomópont maximális elmozdulása” című diagram szemlélteti grafikusán a számított értékeket. A *folymatos vonallal* körbekerített blokk a maximális elmozdulási és feszültségi értékekre kapott eredményt mutatja be. A *pont-vonallal* bekerített téglalapban található a rúd periódusidejére vonatkozó értékek.

Végül az utolsó blokkban (*kettős vonal*) a futtatási idővel kapcsolatos információk olvashatók. Értelemszerűen az első időpont a számítás kezdetét, a második a számítás végét jelzi, kettőjük különbsége adja a futásidőt.



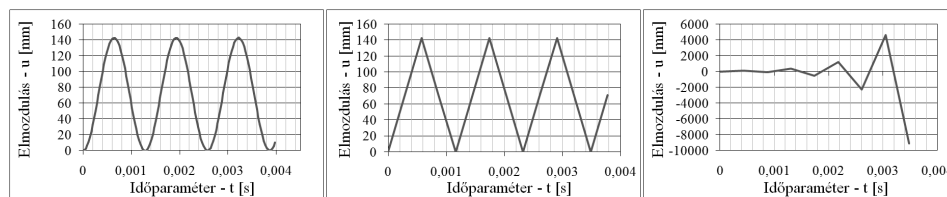
5. ábra. Eredmények képernyője

5. FUTTATÁSOK ÉRTÉKELÉSE

NUMERIKUS STABILITÁSI KÉRDÉSEK

A különböző numerikus módszerek stabilitásának és pontosságának elemzése igen bonyolult feladat. Legegyszerűbb az egy szabadságfokú, csillapítatlan szabadrezgéseknél használt időlépés helyes megállapításának bemutatása. A lépésköz (Δt) megválasztása nem csupán a megoldás hibájára van befolyással, hanem rossz választás esetén lehetetlenné teheti a megoldást magát.

A centrális differenciák módszerénél a $t+\Delta t$ -hez tartozó mozgásjellemzőket kizárólag a t -hez tartozó értékekből számoljuk a 3. pont (*Szakirodalmi áttekintés*) szerint leírtak alapján. Láthatjuk, hogy a (3.30) alatti eredő erővektor értéke még



6. ábra. Végpont elmozdulásai az idő függvényében (stabil numerikus megoldás (balra); kritikus időlépéshez tartozó megoldás (középen); instabil megoldás (jobbra))

nem függ a Δt időlépéstől. Az erővektorból ezek után gyorsulást számolunk (3.31), szintén az időlépéstől függetlenül. Ezek után a gyorsulást „szabadon” felhasználhatjuk a $t+\Delta t$ -hez tartozó mozgásjellemzők kiszámításához (3.32), (3.33). Ebből újra számolva a belső erővektor tagjait a $t+\Delta t$ időpillanatban, fizikai képtelenség, hogy nagyobb erőket kapjunk, mint a külső erővektor tagjai a t -hez tartozó lépésnél:

$$\left| \underline{f}_t^k \right| \geq \left| \underline{f}_{t+\Delta t}^b \right|, \quad (5.1)$$

az általunk megalkotott feltétel szerint a Δt időlépést tehát úgy kell megválasztanunk, hogy a (5.1) feltétel teljesüljön. Vizsgáljuk meg a koncentrált erőre és prizmatikus rúdra vonatkozó stabilitási kritériumot az első időlépésben:

$$\underline{f} = \underline{f}_0^k - \underline{f}_{0+\Delta t}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{0+\Delta t}^{b,1} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f_{0+\Delta t}^{b,m} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.2)$$

ezt behelyettesítve a (3.30) képletbe és az anyagegyenletbe:

$$N - A \cdot C \left(\frac{\alpha \Delta t^2 \cdot N}{l_0^m M^m} \right)^v \geq 0, \text{ azaz} \quad (5.3)$$

$$\Delta t^2 \leq \Delta t_{krit}^2 = \sqrt[v]{\frac{N}{A \cdot C} \frac{l_0^m M^m}{\alpha N}} \text{ általánosan,} \quad (5.4)$$

ahol α egy futóparaméter, mely az első lépésben $\alpha = 0,5$ ezek után $\alpha = 1,0$; M^m a diagonál tömegmátrix utolsó eleme, vagyis az utolsó végeelem tömegének fele; A a prizmatikus rúd keresztmetszeti területe; C a Young-modulus; N a végponti teher; l_0^m a legrövidebb végeelem hossza; ρ_0 a kezdeti állapothoz tartozó sűrűség. Ezt a kifejezést egyszerűsíteni lehet, ha lineárisan rugalmas anyagmodellt használunk:

$$\Delta t \leq \Delta t_{krit} = l_0^m \sqrt{\frac{\rho_0}{C}}. \quad (5.5)$$

A kritikus időlépés megválasztása önsúlyteher esetén csak annyiban módosul, hogy a legkisebb tömegmátrix értékhez tartozó önsúlyértékkel kell helyettesíteni a (5.4) összefüggésben szereplő F erő értéket.

Az algoritmus ellenőrzése és a program bemutatása után rátérhetünk a futtatási eredmények részletesebb elemzésére. Három fő csoportba gyűjtöttük a kapott adatokat: egyik esetben a szerkezetet időben állandó terhekre vizsgáltuk lineáris anyagmodell használata mellett, második esetben a végponti teher időben változó, harmadik esetben a teher állandó, de a rúd anyaga nemlineáris. A vizsgált elem mindig prizmatikus volt.

A vizsgálat arra irányult, hogy a rúd végeelemes felosztásának sűrűségét változtatva – egy vagy több végeelemre osztva a szerkezetet – mekkorára válasszuk az időlépés nagyságát. Minden futtatásnál a stabilitáshoz szükséges kritikus időlépésből (5.4) indultunk ki, majd azt változtatva vizsgáltuk az elmozdulási és feszültségi értékeket.

ELSŐ FUTTATÁSI CSOPORT

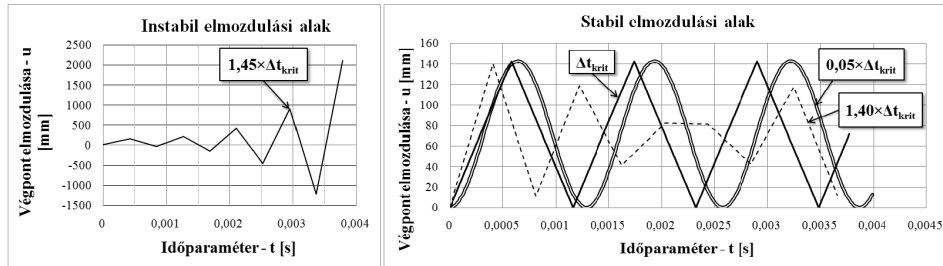
Első futtatási csoportba az időben konstans végponton ható teherrel terhelt prizmatikus rúd tartozik. A rúd anyaga lineárisan rugalmas. Vizsgáljuk meg, hogy a (5.4)-ben meghatározott kritikus időlépés változtatásával hogyan módosul a végpont elmozdulási alakja, és a maximális értékek. A vizsgálatok során a futtatásokat külön-külön állandó időlépéssel végeztük el. A vizsgálat során az alábbi paramétereket használtuk (1. táblázat):

1. táblázat. Első futtatás bemenő paraméterei

Megnevezés	Érték	Megnevezés	Érték
Kezdeti rúd hossz: (l_0)	1 500 mm	Anyagmodell	Lineárisan rugalmas
Kezdeti keresztmetszeti terület (A_0)	25 mm ²	Young-modulus (C)	210 000 N/mm ²
Kezdeti sűrűség (ρ_0)	7,85 g/cm ³	Merevségi paraméter (ν)	1
Nehézségi gyorsulás (g)	0 m/s ²	Végponti teher (N)	250 000 N

Az ábrán (7. ábra) jól látható, hogy a kritikus időlépés ($\alpha = 0,5$ -del számolva) 145%-a teljes numerikus instabilitást okoz (bal ábra). Azonban, ha megtekintjük a jobb oldali ábrát, jól látható, hogy a kritikus időlépcső 140%-a még nem vezet instabilitási problémához, csupán az elmozdulási eredmények hibásak. A futtatások rámutattak arra is, hogy a kritikus időlépés használata a maximális értékek tekintetében még kielégítő pontosságot szolgáltat, de az időbeni viselkedésben (elmozdulási alak, periódusidő) komoly eltérések tapasztalhatóak. Az elmozdulási

értékek a stabil időlépés 5%-ánál már sokkal pontosabbak, mint az előbbi esetben (7. ábra).

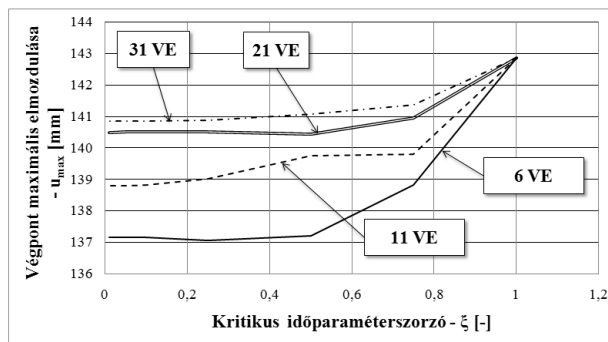


7. ábra. Elmozdulási alak az időlépés nagyságának függvényében, lineárisan rugalmas anyagok esetén

Optimális időlépés megállapítása

A diagramon (8. ábra) jól látszik, hogy a kritikus időlépést használva a maximális elmozdulási érték végeselemes felosztástól függetlenül megegyezik, azonban az időlépést csökkentve ($\Delta t = \Delta t_{krit} \times \xi$), az eredmények egy adott értékhez konvergálnak. A végeselemes felosztás mértékével torzuló elmozdulásfüggvényről a következő bekezdés ad részletesebb leírást.

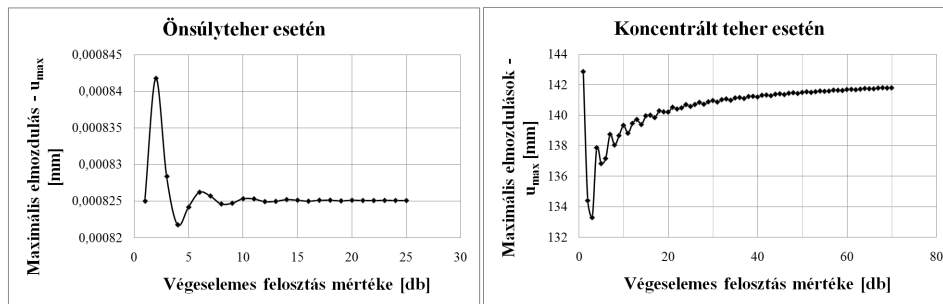
Ha a kritikus állapothoz tartozó időlépés 40%-ánál nem választunk magasabb időlépést, akkor láthatóan (8. ábra) jó eredményt kapunk a végeselemes felosztástól függetlenül, azaz futtatásaink alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy egydimenziós, lineáris anyagmodellrel használó rúd megoldásánál a kritikus időlépés 40%-a már optimális eredményt szolgáltat.



8. ábra. A végpont maximális elmozdulása a végeselemes felosztás és a kritikus időlépés szorzó (ξ) függvényében, lineáris anyagmodellnél

Maximális elmozdulások vizsgálata a végeselemes felosztás függvényében

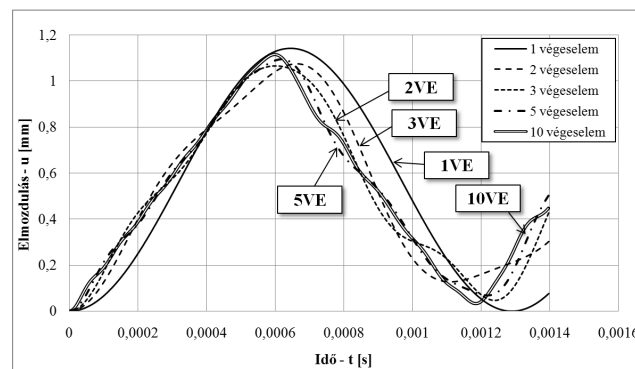
Következő lépésben vizsgáljuk meg a maximális elmozdulási értékeket a végeselemes felosztás mértékének növelésével.



9. ábra. Maximális elmozdulások a végeselemes felosztás függvényében

Az ábrákról (9. ábra) látható, hogy önsúly esetén – a koncentrált terhet 0-ra állítva, és a nehézségi gyorsulást megnövelve $9,81 \text{ m/s}^2$ -ra – a maximális elmozdulás értéke viszonylag kis végeselemszám (25 db) esetén jól konvergál. Ezzel ellentétben a rúd végén elhelyezkedő koncentrált teher hatása csak magas végeselemes felosztás mellett ad pontos eredményt. Ennek oka, hogy a koncentrált erő okozta elmozdulási alak csak magas végeselemes felosztás esetén pontos (10. ábra).

A jelenség a valóságban is megjelenik, mivel ha egy rugón koncentrált erő jellegetű „rántást” végzünk, akkor az erőhullám nem egyszerre nyújtja meg a szerkezetet, hanem időben elkésve. Komoly problémát okoz például a jelenség a *kovácsmackókban* (kovácsgépek üllőiben), ahol a hullámok interferenciájából adódóan

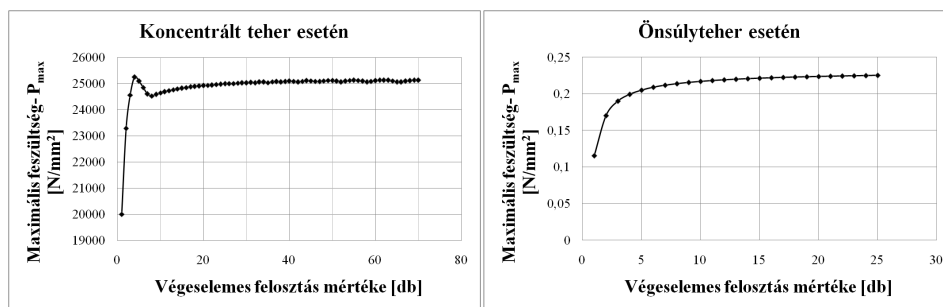


10. ábra. Elmozdulási alak a végeselemes felosztás függvényében

fárasztja a szerkezet belső mikrostruktúráját, apró repedéseket és fáradási tönkremenetelt okozva.

Maximális feszültségek vizsgálata a végeleemes felosztás függvényében

Önsúlyteher esetén a maximális feszültségérték meghatározása azért jelent gondot, mert a támasz-csomópont mindig felveszi a rúd önsúlyának egy részét. Azáltal, hogy lineáris bázisfüggvényeket használunk, 1 végelelem esetén a teljes rúd súlyának fele elvész, 2 végelelem esetén a negyede, és így tovább, vagyis az elveszett súly egy hiperbolikus függvény szerint változik ($1/x$, ahol x a végeleemes felosztás mértéke). Ebből következik, hogy ha a maximális feszültség meghatározásánál minél több végelelemre osztjuk a rudat, annál pontosabb eredményt kapunk. Ezt szemlélteti a 11. ábra.

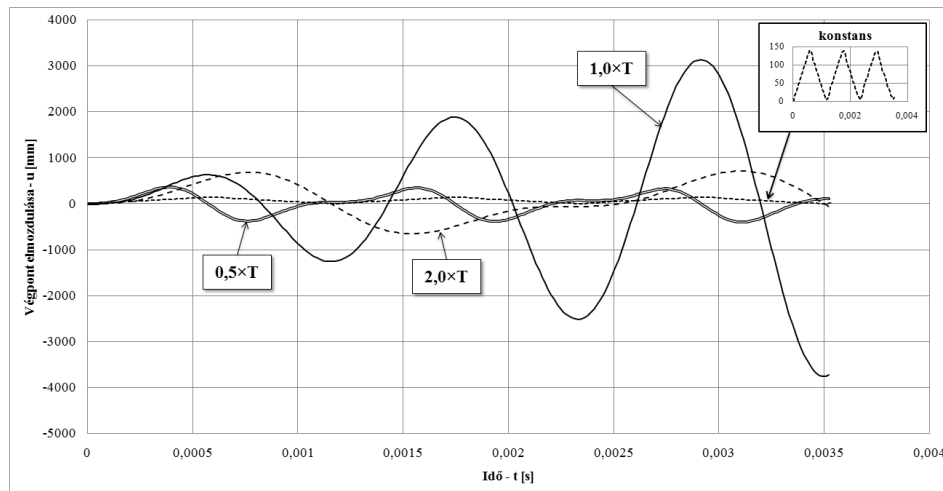


11. ábra. Maximális feszültségek a végelelemszám függvényében

Az ábrán (11. ábra) láthatjuk, hogy az önsúllyal terhelt rúddal ellentétben jelen feladatban igen gyors a konvergencia. Pár tíz végelelem után már nem tapasztalunk változást a 4. értékes jegyben. Meg kell jegyezni, hogy a helyes időlépés megválasztása a feszültségérték meghatározásánál sokkal lényegesebb, mint a maximális elmozdulások esetén. Ha nem adunk meg kellően kicsi időlépést, a feszültségfüggvényünk nem lesz konvergens.

MÁSODIK FUTTATÁSI CSOPORT

A második futtatási csoport az időben szinuszosan változó végponton terhelt rúd elmozdulásait vizsgálja. A teher periódusidejét a konstans, időben állandó teherrel terhelt rúd periódusidejéhez képest vettük fel. A lineárisan rugalmas, prizmatikus rudat 10 végelelemre osztottuk fel.



12. ábra. Periodikus erővel terhelt rúd végpontjának elmozdulása az idő függvényében (a diagramon feltüntetett $\eta \times T$ a terhelőerő periódusidejét jelenti, ahol T a konstans erővel terhelt rúd periódusideje)

A diagramon (12. ábra) feltüntetett $\eta \times T$ a szinuszosan változó terhelőerő periódusidejét jelenti, úgy vettük fel ezeket az értékeket, hogy a T -hez (konstans erővel terhelt rúd periódusideje) képest kisebbek vagy nagyobbak legyenek.

Jól látható, hogy a konstans erővel terhelt rúd esetén létrejövő longitudinális hullám nem jelentkezik, így a belső hullámokból eredő többletmerevség elhanyagolható. Az elmozdulási alak nem torzul a szinuszhoz képest – a fűrészfogalak nem jelenik meg. Ebből következik, hogy az eredeti elmozdulásfüggvényhez képest nagyobb elmozdulásokat kapunk. Ha a terhelőerő periódusideje megegyezik a rúd saját periódusidejével, a koherens hullámok szuperpozícionálódnak és interferencia jön létre, az elmozdulás periódusról periódusra növekszik. Minél kisebb a teher periódusideje, annál kisebb változást okoz az eredeti elmozdulásfüggvényben. Ha a periódusidőt növeljük, akkor az válik dominánssá, és a rúd rezgései lesznek az apró zavaróhullámok.

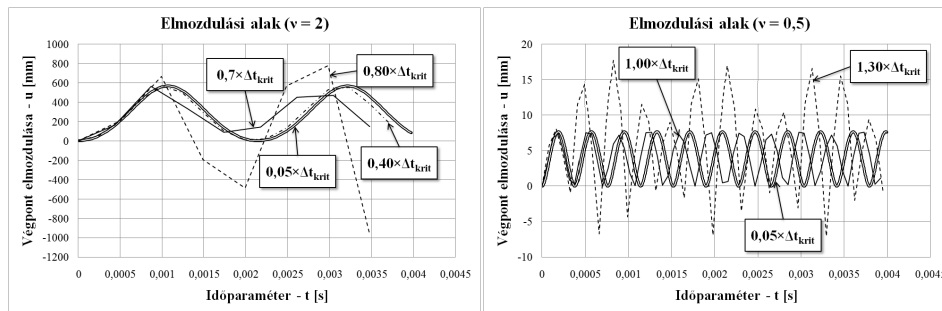
HARMADIK FUTTATÁSI CSOPORT

A program a geometriai nemlinearitáson kívül a fizikai nemlinearitás kezelésére is alkalmas. Egy egyszerű anyagmodell segítségével választhatunk felkeményedő, lágyuló és lineárisan rugalmas anyag közül. Jó példa a felkeményedő anyagmodellre a hegymászók kötele, mely a megnyúlás első szakaszán viszonylag nagy alakváltozásokat szenved, viszont ahogy növekszik az alakváltozás, egyre jobban

megnő a normálmerevsége a kötélszálnak. Lágyuló anyagmodellre kiváló példa a beton- és vályogoszlopok pontos viselkedése [11].

Az anyagmodellt a $P_i = C \cdot F_i^\nu$ egyenlet alapján lehet felvenni. A futtatások során csak a ν keménységi tényezőt változtattuk. Minden egyéb paraméter megegyezett az első csoportban használt rúdével, azaz a végpontot koncentrált konstans erő terheli. Első esetben a változó paraméter $\nu = 0,5$, azaz az anyag lágyuló tulajdonságokat mutat, második esetben $\nu = 2$, így az anyag felkeményedik a terhelés hatására.

Az anyagmodell keményítésével ($\nu = 2$), a feladat sokkal érzékenyebbé válik instabilitási kérdésekben. Vizsgáljuk meg először, hogy mi történik, ha az α paramétert 0,5-re választjuk, Látni fogjuk, hogy az első pár lépés után gyors léptekkel fog növekedni az elmozdulásfüggvényünk, numerikus instabilitás jön létre (13. ábra). A kritikus állapothoz tartozó időlépés 70%-a ad stabil eredményt. Ennek oka az, hogy az α paraméter változtatlansága érzékenyen hat a felkeményedő anyagok numerikus modellezésére.

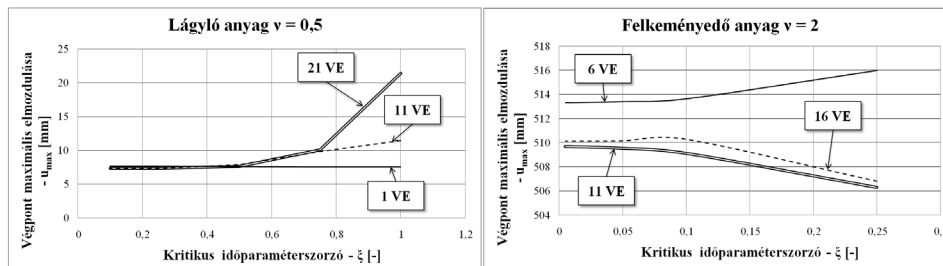


13. ábra. Elmozdulási alak az időlépés nagyságának függvényében nemlineárisan rugalmas anyagok esetén

Amennyiben az anyagmodellben $\nu = 0,5$, a vizsgálat érzékenysége csökken, a kritikus időlépés stabil elmozdulásfüggvényt szolgáltat.

Optimális időlépés megállapítása

Ahogy az ábrán (13. ábra) láttuk, a felkeményedő anyagot sokkal érzékenyebben érinti a helyes időlépés megválasztása. Ilyen problémákkal találkozhatunk a biomechanikában – érfalak rezgésének vizsgálatánál –, ahol a kezdeti terhelés ellen csak elhanyagolhatóan minimális merevséget tapasztalunk. Így az optimális időlépés megválasztása is a következőképpen módosul (14. ábra).



14. ábra. A végpont maximális elmozdulása a végeleemes felosztás és a kritikus időlépés szorzó (ξ) függvényében – nemlineáris anyagmodell

Látható, hogy a 40%-os csökkentés még numerikus instabilitáshoz vezet az első pár lépés után. Azonban ha lecsökkentjük az időlépés nagyságát a kritikus 5%-ra, akkor már kellően pontos eredményekhez jutunk.

Ezzel ellentétben a lágyuló anyagmodelleknek kezdeti merevsége nagy, ezért ott a megszokott 40%-os csökkentés megfelelő eredményhez vezet.

A maximális elmozdulási értékek a végeleemes felosztással növelésével viszonylag gyorsan konvergálnak, a maximális feszültségek számításánál, minél több végeleemet használunk, annál pontosabb eredményt kapunk.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Cikkünkben egydimenziós nemlineáris feladatok teljes Lagrange-rendszerben történő végeleemes megoldása került leírásra. Az iterációt centrális differenciámmódszerrel végeztük el.

Szakirodalmi áttekintésünkben bemutattuk a nemlineáris végeleemmódszer, az időintegrálás és a differenciámmódszer történelmi fejlődésének főbb állomásait. A bevezető végén összefoglaltuk az algoritmus legfontosabb lépéseit és ismertetésre került a szoftver alkalmazása is.

A kutatási feladat lényegi részét alkotják a futtatási eredmények, melyeket három nagy részre lehet osztani. A futtatások prizmatikus rúdnál segítséget adnak az explicit végeleemes módszerekhez használt időlépés helyes és optimális megválasztásához.

Levezettünk egy – a kritikus időlépést meghatározó – eljárást, majd annak segítségével vizsgáltuk, hogy az időlépés változtatása hogyan befolyásolja a végpont elmozdulási alakját. Javaslatot tettünk az időlépés optimális megválasztására, hogy az elmozdulások kellően pontosak legyenek. Eredményeink alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy felkeményedő anyagok vizsgálata során – me-

lyeknek alacsony a kezdeti merevsége – az alkalmazott időlépésnek sokkal alacsonyabbnak kell lennie, mint a lágyuló vagy lineárisan rugalmas társaiknál.

A végeelemes felosztás az anyagmodell függvényében is jelentős változásokat okozhat. Míg lineárisan rugalmas anyagok esetén a helyes elmozdulásfüggvény meghatározásához szükséges a magasabb fokú felosztás, úgy a nemlineáris anyagmodellek esetén a feszültséganalízis követeli azt meg. A végeelemes felosztás függvényében a koncentrált erővel terhelt rúd elmozdulási alakja nagymértékben változik, ezt a jelenséget a végigfutó longitudinális hullám okozza, mely vonalmenti terhek esetén nem jelenik meg

A periodikus vizsgálat kimutatta, hogy ha a rúd periódusidejével egyező szinuszos terhet veszünk fel, az erősíteni fogja a rezgést. Azáltal, hogy a terhet fokozatosan adjuk a rúdra, nem jelenik meg a végig futó longitudinális hullám, és nem okoz többletmerevséget, így nem jelenik meg a fűrészfog-függvény. Ha a teher periódusideje a rúdénál nagyobb, akkor az elmozdulásfüggvényt a teher dominálja, ha kisebb, akkor a rúd szabadrezgése.

Végeredményképpen kimondhatjuk, hogy a szoftver pontos eredményeket szolgáltat, az algoritmus verifikált, szabadon és jól használható bárki által 1D mechanikai problémák megoldására.

* * *

Szeretnénk köszönetet mondani *Dr. Gáspár Zsoltnak* a segítőkész támogatásért, valamint munkánk alapos és kritikus szemrevételezéséért.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Finite element method, url: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method; (megtek. dátuma: 2010.08.05).
- [2] Bathe, K. J., Wilson, E. L.: NONSAP — A nonlinear structural analysis program (1974).
- [3] Bojtár I., Gáspár Zs.: Nemlineáris végeelemek, BME 2010.
- [4] Veress Á.: Numerikus módszerek és alkalmazások a hő- és áramlástechnikai gépekben lezajló folyamatok modellezésére – PhD értekezés, Budapest (2004).
- [5] Explicit and implicit methods, url: http://en.wikipedia.org/wiki/Explicit_and_implicit_methods (megtek. dátuma: 2010. 08. 07.)
- [6] Semi-implicit Euler method, url.: http://en.wikipedia.org/wiki/Semi-implicit_Euler_method (megtek. dátuma: 2010. 08. 17.)
- [7] Numerical analysis, url.: http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_analysis#History (megtek. dátuma: 2010. 08. 25.)
- [8] Numerical ordinary differential equations, url.: http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_ordinary_differential_equations#History (megtek. dátuma: 2010. 08. 25.)
- [9] Newmark, N. M.: A Method of Computation for Structural Dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 85. No. EM3 (1959).

- [10] ode23, ode45, url.: <http://www.nd.edu/~dtl/cheg258/notes/doc/ode45.html> (megtek. dátuma: 2010. 09. 05.)
- [11] Csicsely, Á.: Vályogfalazat nyomószilárdsági vizsgálata, url.: <http://www.muszeroldal.hu/measurenotes/valyog.pdf> (megtek. dátuma: 2010. 09. 05.)

SOLUTION OF 1D FINITE ELEMENT PROBLEMS WITH EXPLICIT TIME INTEGRATION

Summary

The study deals with the examination of 1D nonlinear finite element problems. The software achieves the solution with explicit time integration, the central differences method. The tool is used for the mechanical examination of the drawn-pressed beam with nonlinear behaviour.

The paper includes a guide to adjust the correct time step, for the explicit method, and three fundamental groups of results. In the first case the beam was linear elastic, and the load was constant. The second group contain the results with fluctuating load. In the third group the beam is nonlinear elastic.

Keywords: nonlinear, finite element, explicit time integration